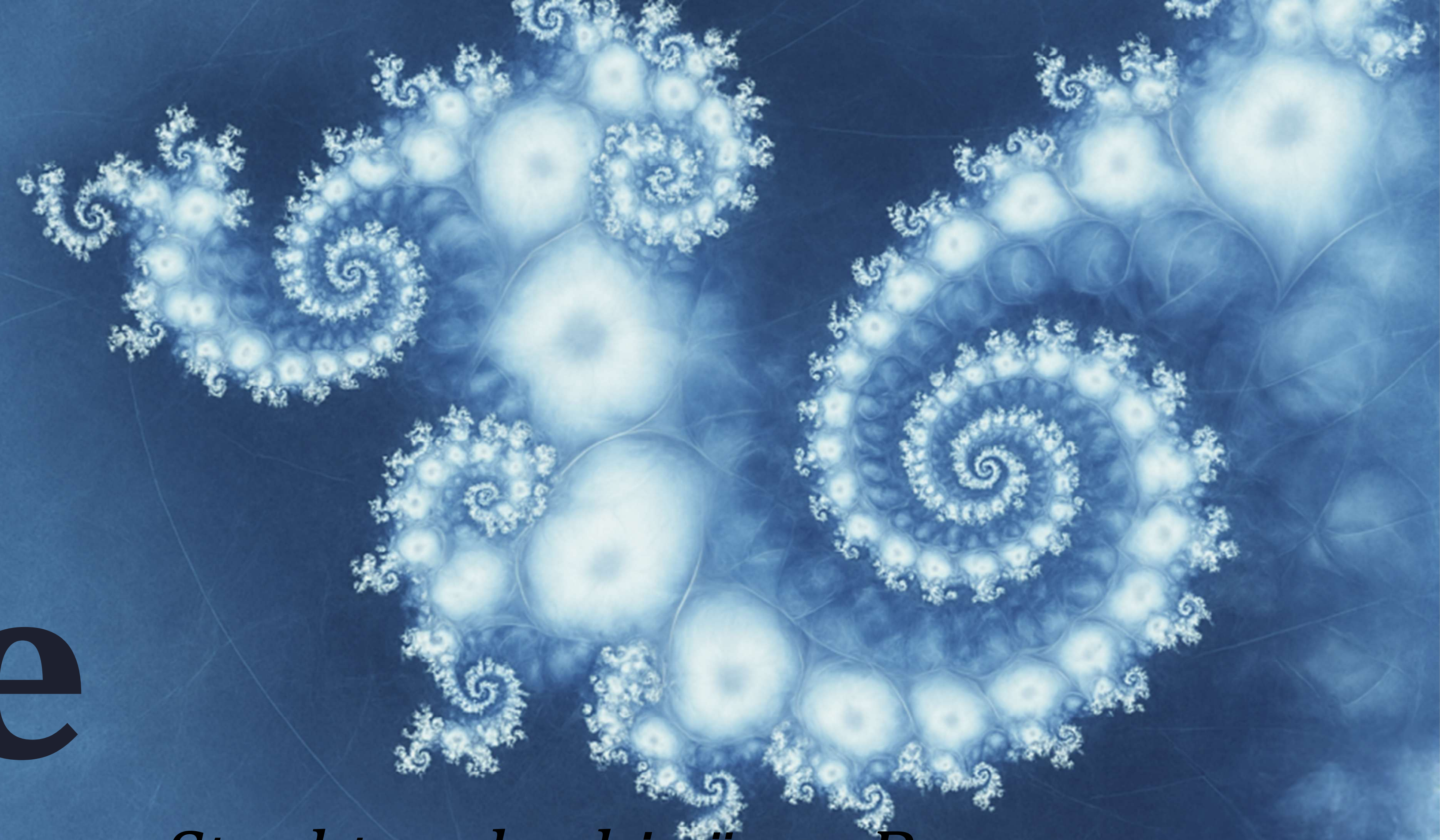


Fraktale Geometrie



Struktur des binären Baumes
Lenya Boog, Kantonsschule Musegg 2026

Einleitung

Fraktale sind geometrische Figuren die beim Skalieren selbstähnliche Strukturen aufweisen. Der binäre Baum, ein Beispiel eines Fraktals, wächst mit jeder Iteration (weiderholte Anwendung einer Regel) um eine neue Reihe von Ästen. In dieser Arbeit wird untersucht, wie sich verschiedene Punkte auf dem binären Baum bewegen, wenn sich der Winkel zwischen den Ästen verändert. Während grundsätzlich der Schwerpunkt auf dem binären Baum liegt, wird darüber hinaus auch untersucht, inwieweit dieselben Methoden auf andere fraktale Figuren anwendbar sind.



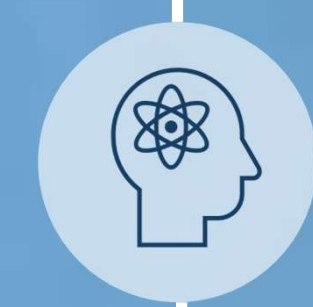
Berechnung

Die Berechnung lässt sich grob in 4 Schritte unterteilen:

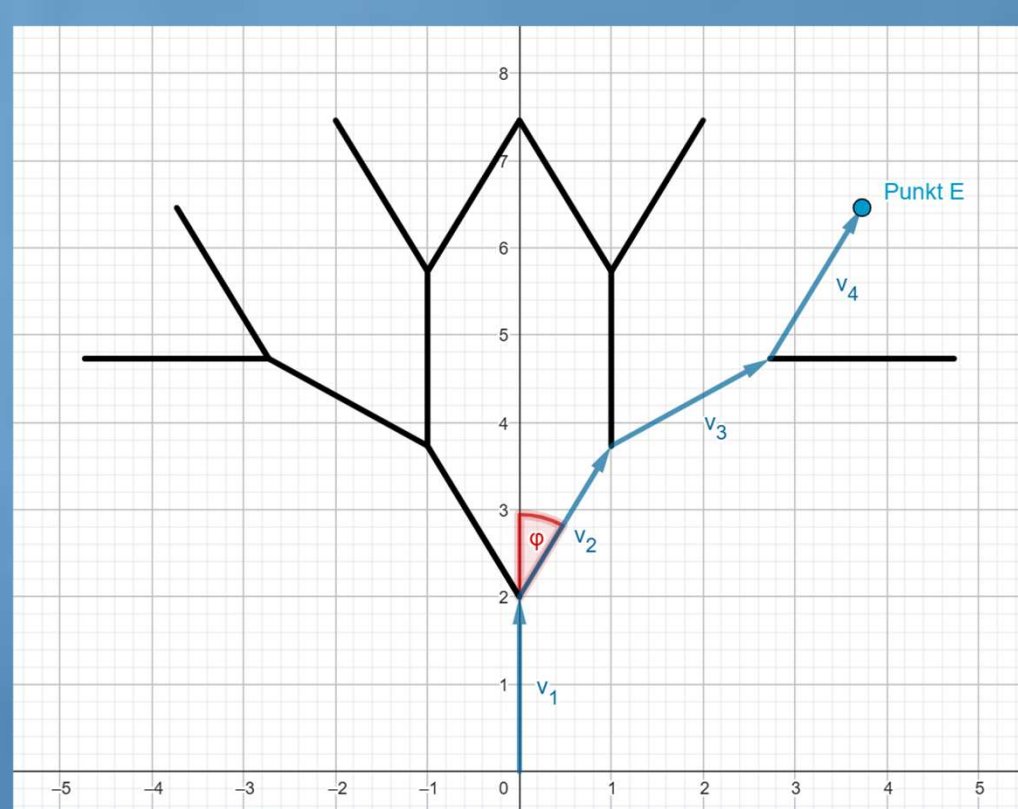


Fraktal erzeugen

Mithilfe von Lindenmayer-Systemen lassen sich einfache Fraktale in verschiedenen Iterationen erzeugen. Dabei werden wiederholt Teile einer Zeichenfolge durch gegebene Ersetzungsregeln ersetzt.



Abschnittsweise interpretieren



Die einzelnen Segmente des binären Baumes werden als Vektoren aufgefasst. Für die Drehung der einzelnen Äste werden die Vektoren mit Drehmatrizen multipliziert.

Durch eine Vektoraddition kann jeder beliebiger Punkt auf dem binären Baum beschrieben werden (siehe Abbildung).



Winkel als Parameter festlegen

Die Winkel aus dem resultierenden Vektor werden nun mit dem allgemeinen Parameter φ ersetzt.

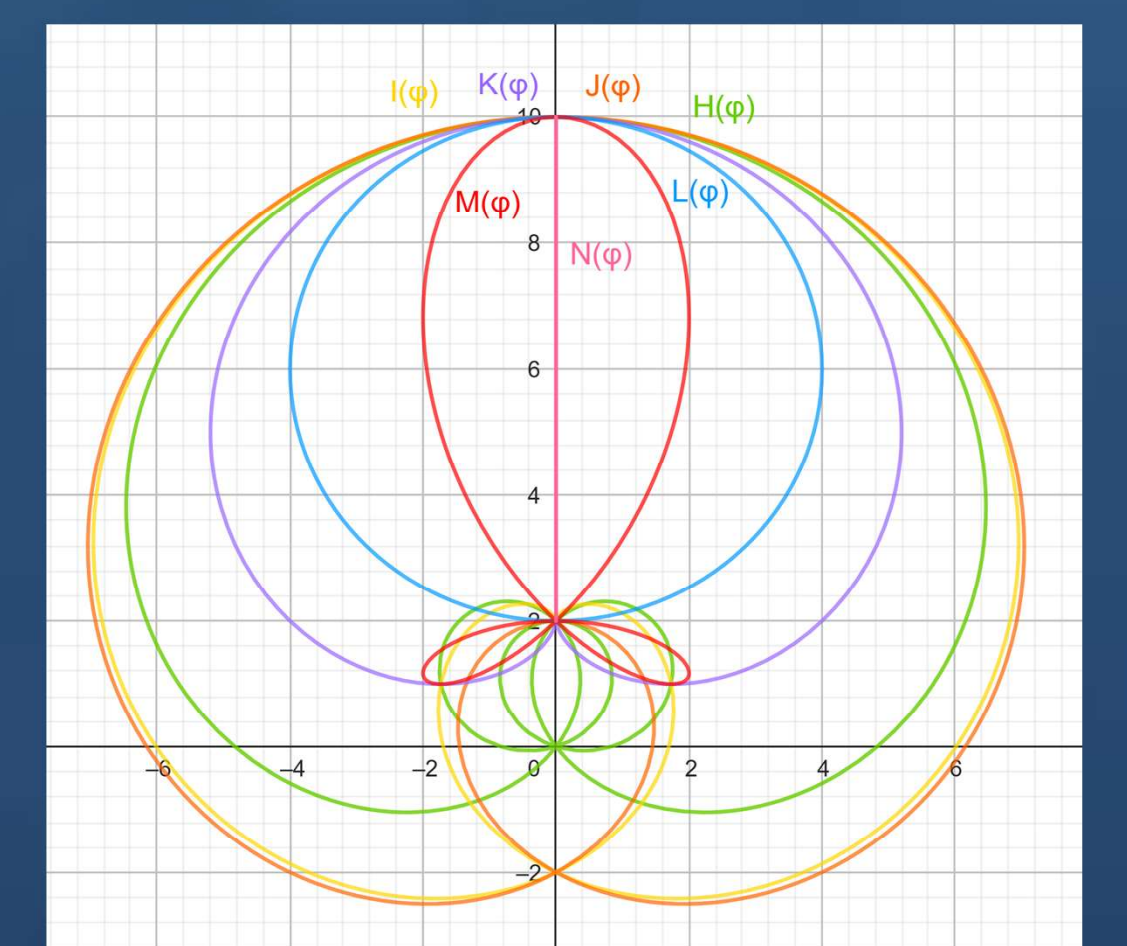
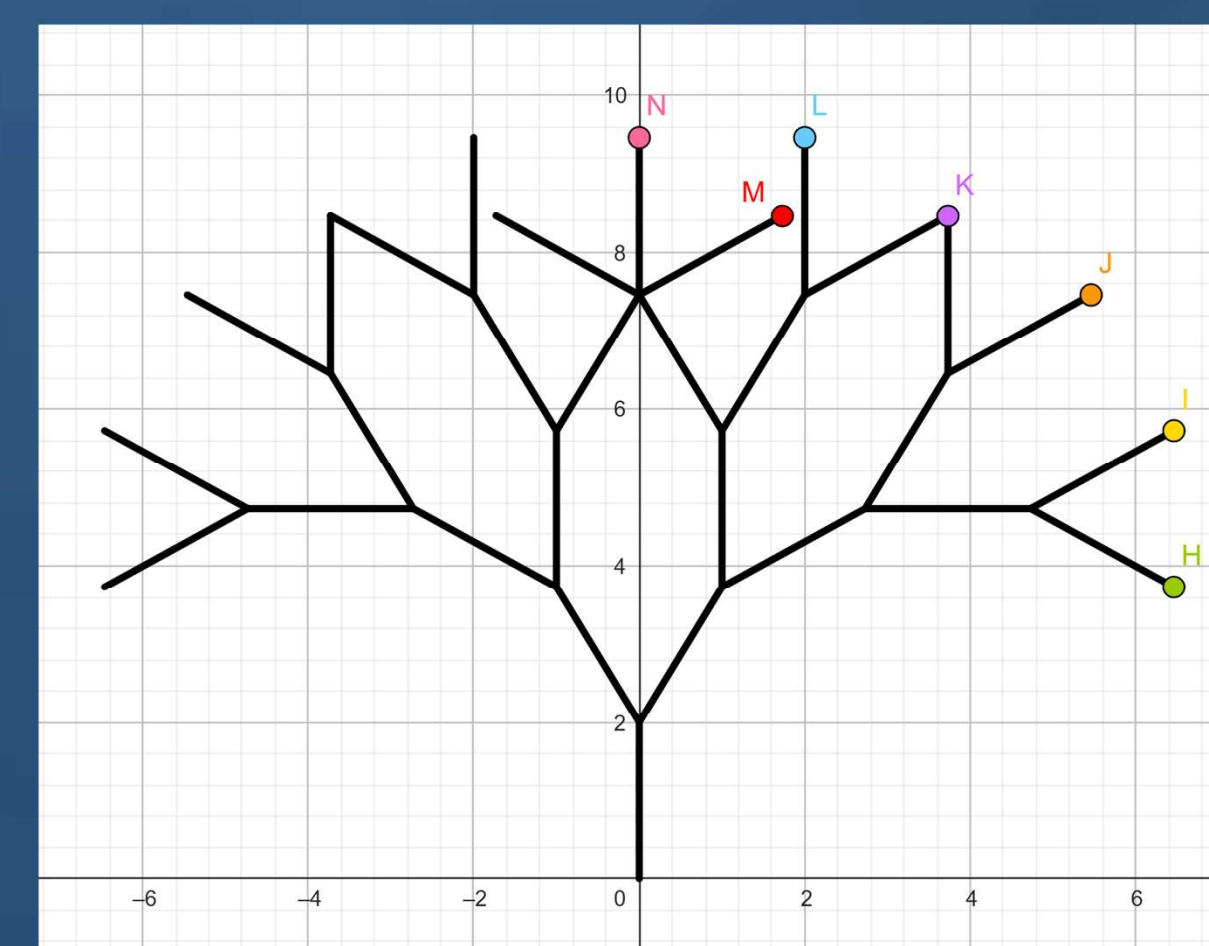


Parametrisierung

Um die Bewegung des Punktes in Abhängigkeit vom Winkel zu verfolgen, lässt man φ das Intervall von 0 bis 2π durchlaufen. Es entsteht eine kontinuierliche Kurve, die sich durch eine Parametrisierung beschreiben lässt.

Ergebnisse/Fazit

- Für jeden Wert des Winkels φ ergibt sich durch eine Parametrisierung ein neuer Punkt. Lässt man φ kontinuierlich von 0 bis 2π durchlaufen, ergibt sich eine zusammenhängende Kurve anstelle von einzelnen Punkten.
- Einige Kurven sind bereits bekannt in der Mathematik, es entstehen Kreise, Kardioiden oder Pascalsche Schnecken.
- Insgesamt lässt sich beobachten, dass die Kurven in höheren Iterationen des binären Baumes tendenziell grösser und komplexer werden. Die zunehmende Anzahl Vektoren und die Kombination unterschiedlicher Vektoren verursacht komplexere Kurven.
- Die folgenden zwei Bilder zeigen exemplarisch die resultierenden Kurven aller Punkte des binären Baums in der vierten Iteration:



Quellen:

- <https://arndt-bruenner.de/mathe/pdf/PascalscheSchneckeEnvelope.pdf>
- https://www.researchgate.net/publication/305812350_L-system_Fractals_an_educational_approach_by_new_technologies
- <https://piratefsh.github.io/p5js-art/public/l/systems/>