

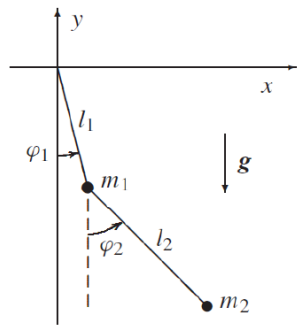
SIMULATION EINES DOPPELPENDELS

Leandro Pfendsack
KS Beromünster

Theoretische Grundlagen

Doppelpendel

Das Doppelpendel ist ein Pendel, welches zwei hintereinander aufgehängte Pendel mit je einem Freiheitsgrad hat. Während das einfache Pendel bei kleinen Auslenkungen annähernd harmonisch schwingt, zeigt das Doppelpendel bereits bei moderaten Anfangswinkeln komplexe und teils chaotische Bewegungen.



1: das Doppelpendel

Charakteristisch ist die starke Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen: Geringfügige Unterschiede in Startwinkel oder Anfangsgeschwindigkeit führen nach kurzer Zeit zu deutlich unterschiedlichen Bewegungsverläufen.

Es wurden zwei Modellierungen betrachtet:

- **Mathematisches Doppelpendel:** Punktmassen an masselosen Stäben
- **Physikalisches Doppelpendel:** Ausgedehnte Körper inkl. Trägheit

Letzteres bildet reale Systeme genauer ab wegen der Rotationsenergie.

Euler-Lagrange-Gleichung

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen wurde der Lagrange-Formalismus verwendet. Dieser beschreibt ein mechanisches System mithilfe verallgemeinerter Koordinaten. Für das Doppelpendel sind dies die Winkel φ_1 und φ_2 .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} = 0$$

Durch Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung entsteht ein gekoppeltes System zweier nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zur numerischen Lösung wurde dieses System in ein System erster Ordnung überführt, wodurch es zum Anfangswertproblem wird.

Numerik

Zur Lösung wurden mehrere explizite Integrationsverfahren implementiert und verglichen: das Eulerverfahren, das Heun-Verfahren, das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung und sowie Adams-Bashforth-Verfahren 2. – 5. Ordnung.

Die Verfahren unterscheiden sich hinsichtlich Fehlerordnung, Stabilität und Rechenaufwand. Einfache Verfahren basieren auf lokalen Approximationen niedriger Ordnung, während höherwertige Verfahren mehrere Zwischenschritte oder frühere Funktionswerte nutzen, um die Genauigkeit zu erhöhen.

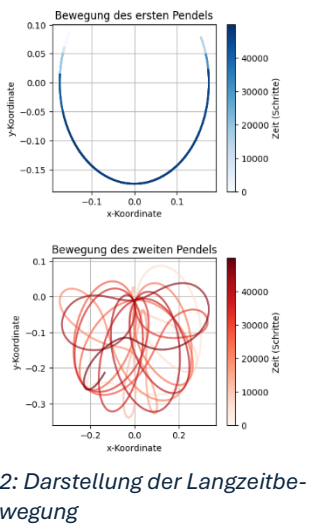
Methodisches Vorgehen

Die Arbeit gliederte sich in drei Hauptschritte:

1. **Theorie**
Herleitung der Bewegungsgleichungen für das mathematische und physikalische Doppelpendel mittels Euler-Lagrange-Formalismus sowie Umformung in ein gekoppeltes System erster Ordnung.
2. **Numerik**
Implementierung expliziter Integrationsverfahren in Python und Durchführung systematischer Simulationen mit variierenden Schrittweiten zur Analyse von Konvergenz und Energieerhaltung.
3. **Experiment**
Vermessung eines realen Doppelpendels, Videoanalyse der Bewegung und qualitativer Vergleich zwischen Simulation und Messdaten.

Für das reale System wurden Längen, Massen und Schwerpunktabstände experimentell bestimmt. Die Bewegung wurde mittels Tracking-Software ausgewertet und mit der Simulation verglichen.

Als zentrales Bewertungskriterium diente die Gesamtenergie. Da sie im idealisierten Modell konstant bleibt, erlaubt ihre zeitliche Entwicklung eine Beurteilung der numerischen Stabilität. Neben der Energieerhaltung wurden die Rechengeschwindigkeit/-dauer, sowie die Bewegung an sich zu zentralen Vergleichsaspekten. Durch die Energieerhaltung konnte auch die Fehlerordnung bestimmt werden.



Resultate

Verfahren niedriger Ordnung zeigen bereits nach kurzer Simulationszeit deutliche Abweichungen in der Gesamtenergie. Insbesondere das explizite Eulerverfahren führt zu einer systematischen numerischen Energiezunahme, da lokale Approximationsfehler kumulativ anwachsen. Dies äußert sich in physikalisch unrealistischen Bewegungsverläufen und instabilem Verhalten des Systems. Auch das Heun-Verfahren verbessert die Stabilität nur begrenzt und weist bei längeren Simulationen einen erkennbaren Energiedrift auf.

Das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung sowie Adams-Bashforth-Verfahren **höherer Ordnung** liefern hingegen deutlich stabilere Resultate. Die Gesamtenergie bleibt über wesentlich längere Zeiträume nahezu konstant, wodurch realistische Bewegungsmuster reproduziert werden können. Dennoch zeigt sich bei sehr langen Simulationszeiten selbst bei diesen Verfahren eine schleichende Abweichung. Diese ist auf die Aufsummierung numerischer Rundungsfehler zurückzuführen und wird durch die Sensitivität chaotischer Systeme zusätzlich verstärkt.

Verfahren	theoretische Ordnung	erhaltene Ordnung bei acht Datenpunkten
RK4	4	3.9422
AB5	5	4.5335
AB4	4	3.9118
Heun	2	1.9855
Euler	1	0.9847

Tabelle 1: Fehlerordnung ausgewählter Verfahren

Der Vergleich zwischen mathematischem und physikalischem Modell verdeutlicht den Einfluss der Modellierung auf die Simulationsergebnisse, welche sich stark unterscheiden. Dennoch bleiben systematische Abweichungen bestehen, da reale Effekte wie Reibung, Luftwiderstand oder kleine mechanische Verluste im idealisierten Modell nicht berücksichtigt werden. Diese Effekte führen im Experiment zu einer allmählichen Energieabnahme, während das theoretische Modell eine ideale Energieerhaltung annimmt.

Fazit

Die Untersuchung zeigt, dass numerische Verfahren ein unverzichtbares Werkzeug zur Analyse nichtlinearer und chaotischer Systeme darstellen. Während einfache Verfahren wie Euler rechnerisch effizient sind, verlieren sie schnell an Genauigkeit und Stabilität. Höherwertige Verfahren wie RK4 oder Adams-Bashforth 4./5. Ordnung bieten deutlich bessere Energieerhaltung und längere stabile Simulationszeiten, sind jedoch rechenintensiver. Keines der untersuchten Verfahren kann das chaotische Verhalten langfristig exakt reproduzieren, da kleinste numerische Fehler verstärkt werden.

Der Vergleich mit einem realen Doppelpendel verdeutlicht zudem die Grenzen idealisierter Modelle. Trotz präziser Herleitung bleiben reale Dissipationseffekte unberücksichtigt.